

DIFERENSIAL



Matematika Ekonomi

Oleh:
Osa Omar Sharif
Institut Manajemen Telkom

Diferensiasi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(f(x+\Delta x) - f(x)) / \Delta x]$$

ELASTISITAS

- Elastisitas adalah pengukuran tingkat respon/kepekaan satu variabel terhadap variabel yang lainnya
➔ Menunjukkan perubahan satu variabel sebagai akibat dari perubahan variabel lainnya
- Besar kecilnya respon/kepekaan dilihat dari besarnya angka koefisien elastisitas/indeks elastisitas
- Konsep elastisitas yang umum dipakai:
 1. **Price Elasticity /Elastisitas Harga**
 - Price Elasticity of demand/Elastisitas harga permintaan
 - Price Elasticity of supply/Elastisitas harga penawaran
 2. **Cross price Elasticity/Elastisitas Silang**
 3. **Income Elasticity/ Elastisitas Pendapatan**

1. Elastisitas Harga Permintaan

Elastisitas harga permintaan :

Persentase perubahan jumlah barang yang diminta akibat terjadinya perubahan harga itu sendiri

$$E_D = \frac{\text{Persentase perubahan jumlah barang yang diminta}}{\text{Persentase perubahan harga barang itu sendiri}}$$

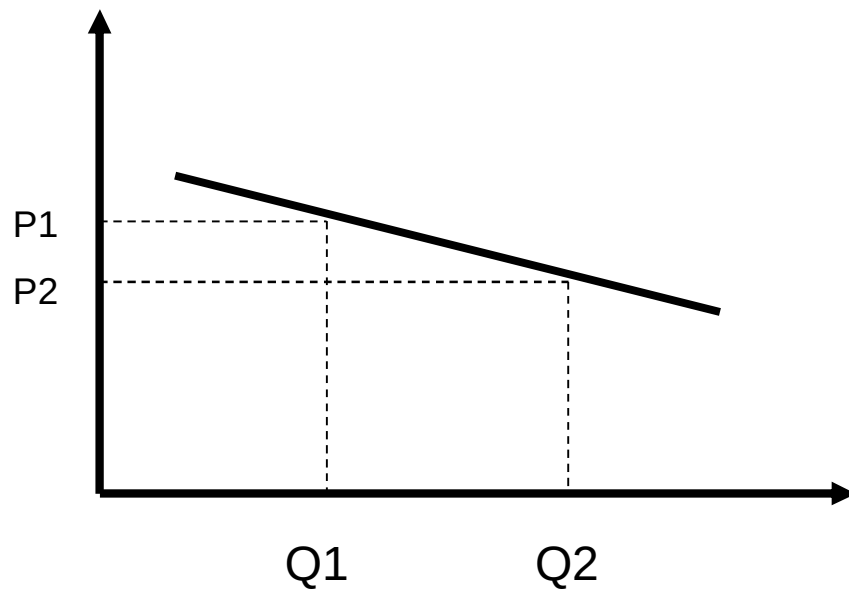
$$Ed = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta P} = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)}}{\frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2}(P_1 + P_2)}}$$

Hasil perhitungan

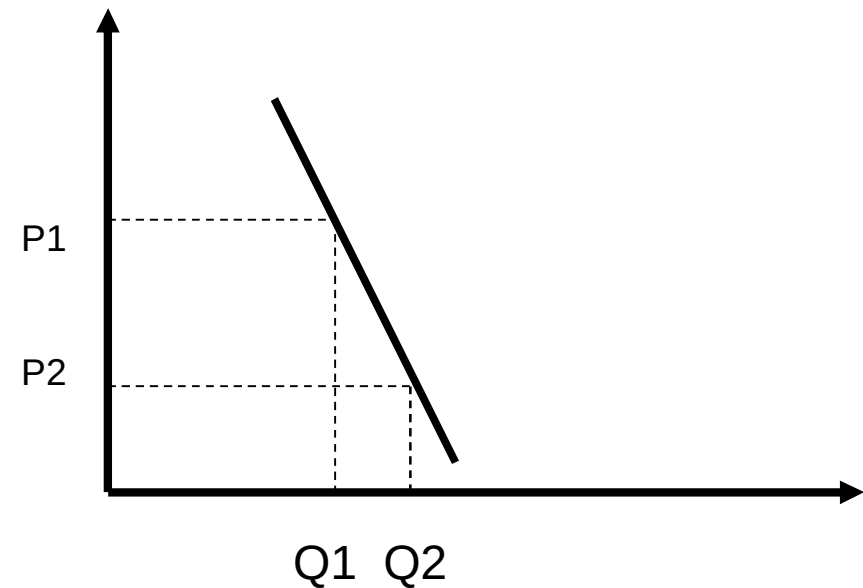
- $|E_d| > 1$ disebut elastis
- $|E_d| < 1$ disebut inelastis
- $|E_d| = 1$ disebut unitary elastis
- $|E_d| = 0$ disebut inelastis sempurna
- $|E_d| = \infty$ disebut elastis sempurna
- Note:
Karena P & Q hubungannya adalah berbanding terbalik,
maka E_D negatif

Elastisitas dalam kurva

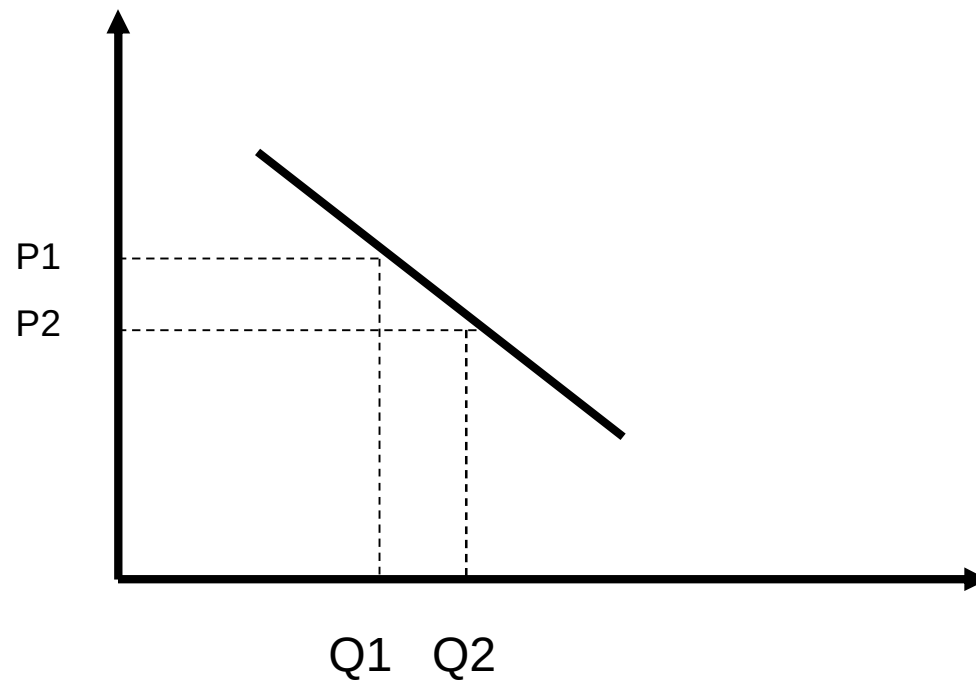
- $E_d > 1$ disebut elastis

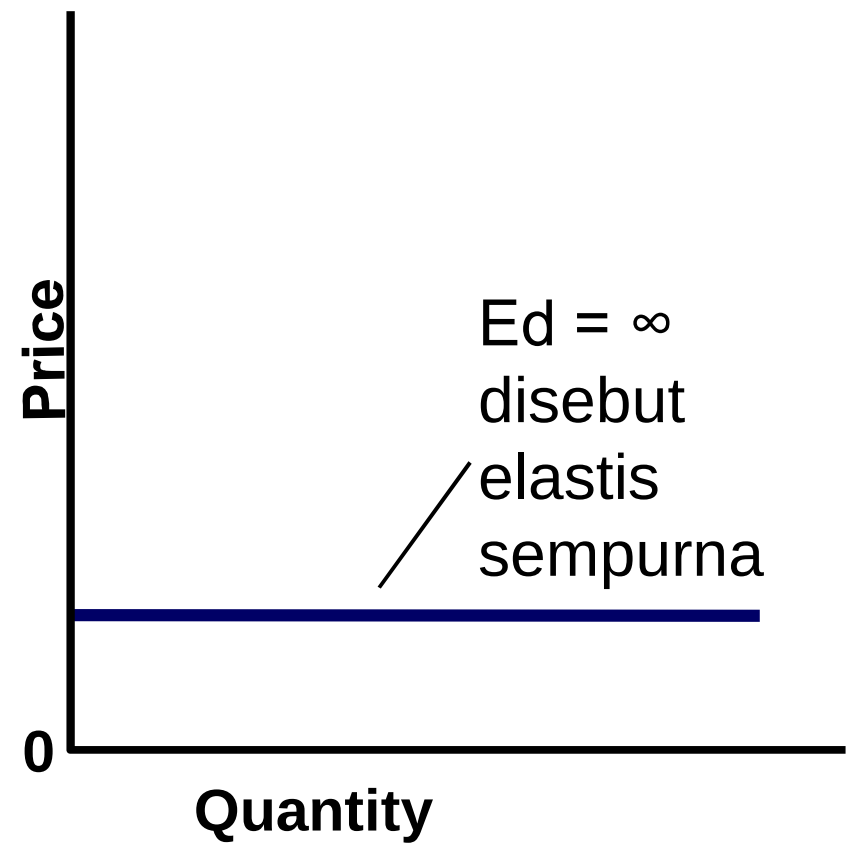
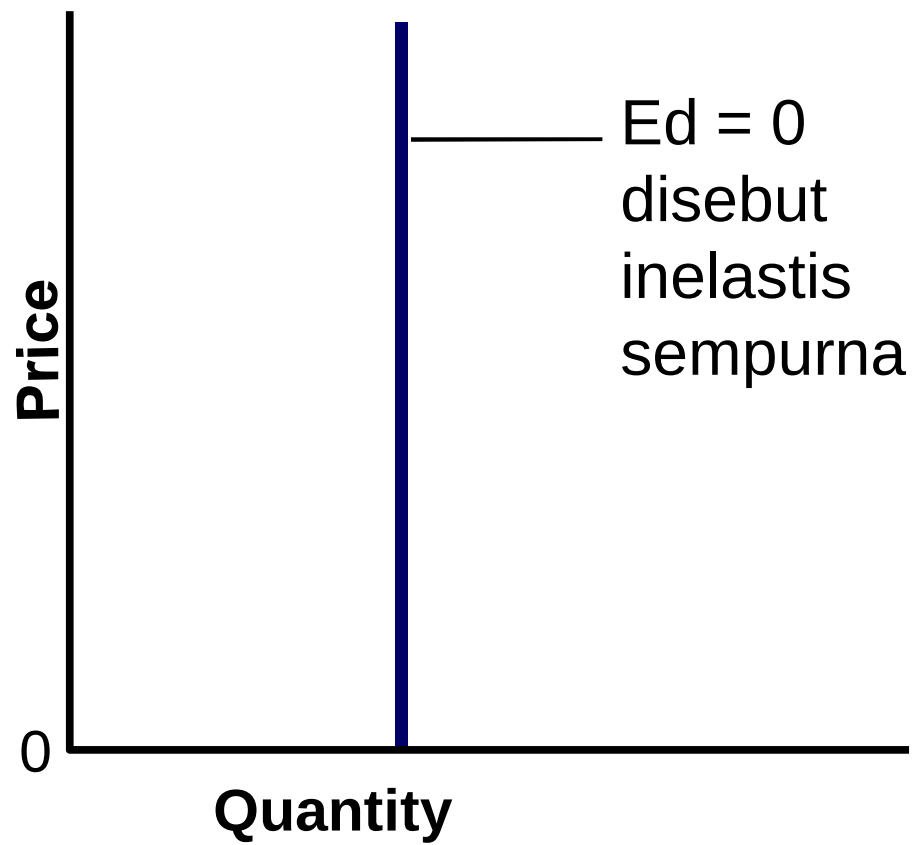


- $E_d < 1$ disebut inelastis



- $E_d = 1$ disebut unitary elastis





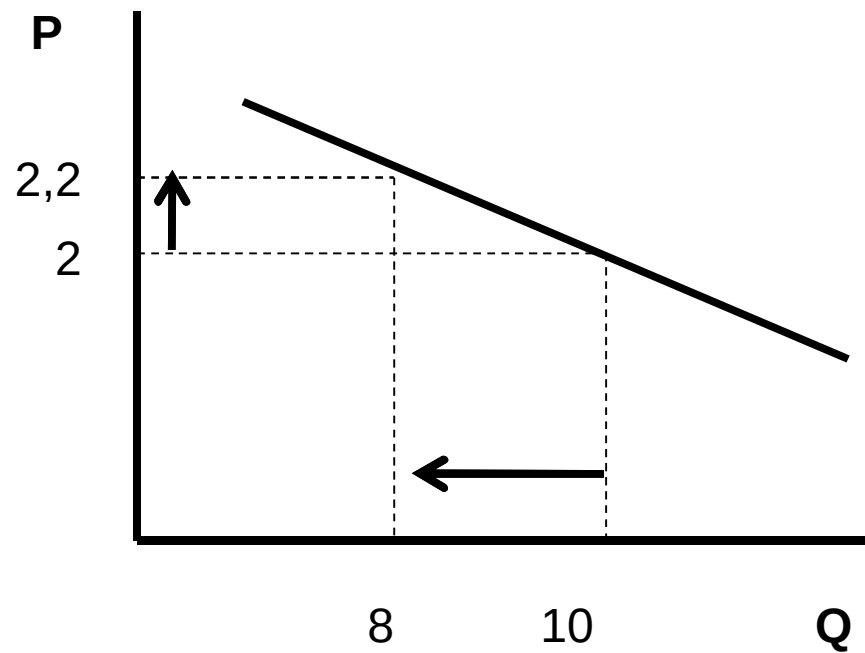
SOAL-SOAL

1. Apabila harga es krim naik dari Rp 2 menjadi Rp 2,2 dan jumlah pembelian turun dari 10 batang menjadi 8 batang, maka hitunglah elastisitas permintaannya!

$$\frac{\frac{(8-10)}{(10+8)/2}}{\frac{(2.20-2.00)}{(2.00+2.20)/2}} = \frac{-22\%}{9.5\%} = -2.32$$

- ➔ Perubahan harga sebesar 1 persen akan menimbulkan perubahan permintaan sebesar 2,32 %. ➔ Elastis
- ➔ Elastisitas permintaan memiliki hubungan negatif (arahnya berbalikan), yaitu ketika harga naik permintaan akan turun, vice versa.

Jawaban dengan Kurva



Rumus Elastisitas

$$Ed = \frac{\% \Delta Q}{\% \Delta P} = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{Q}}{\frac{P_2 - P_1}{P}} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

Contoh

- Permintaan akan barang dicerminkan oleh $Q_d = 4 - P$. Hitunglah elastisitas permintaannya pada tingkat harga $P = 3$ dan pada saat $Q_d = 3$.

Latihan

- Fungsi penawaran suatu barang dicerminkan oleh $Q_s = -200 + 7P^2$. Berapa elastisitas penawarannya pada tingkat harga $P = 10$ dan $P = 15$?

Titik Ekstrim (Titik Kritis)

- $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$
- Jika $y'' < 0$, titik ekstrimnya adalah titik maksimum, bentuk parabolanya terbuka ke bawah
- Jika $y'' > 0$, titik ekstrimnya adalah titik minimum, bentuk parabolanya terbuka ke atas
- Jika $y'' = 0$, titik ekstrimnya merupakan titik belok (khusus untuk fungsi kubik)

Latihan

- Jika suatu perusahaan manufaktur ingin menghasilkan suatu produk, dimana fungsi biaya total telah diketahui adalah $TC = 0,1Q^3 - 18Q^2 + 1700Q + 34000$.
 - a. Carilah fungsi biaya marjinal (MC)
 - b. Berapakah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya marjinal minimum?
 - c. Berapa nilai biaya marjinal minimum tersebut?

Biaya Total, rata-rata, dan Marjinal

- Hitunglah besarnya biaya marjinal minimum dari persamaan biaya total $TC = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$. Hitung juga besarnya biaya total di saat biaya marjinal minimum.

Latihan

- Jika diketahui fungsi biaya total dari suatu perusahaan adalah $TC = 0,2Q^2 + 500Q + 8000$
 - a. Carilah fungsi biaya rata-rata (ATC)
 - b. Berapakah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya rata-rata minimum?
 - c. Berapa nilai biaya rata-rata minimum tersebut?

Latihan

- Jika diketahui fungsi biaya total dari suatu perusahaan pabrikan adalah $TC = Q^3 - 30Q^2 + 325Q + 65000$
 - a. Carilah fungsi biaya tetap (FC) dan biaya variabel (VC)
 - b. Carilah jumlah produk yang dihasilkan agar biaya variabel rata-rata (AVC) minimum?
 - c. Berapakah nilai biaya variabel rata-rata minimum (AVC) tersebut?

Penerimaan Total, Rata-rata, dan Marjinal

- Jika diketahui fungsi permintaan seorang monopoli adalah $P = 18 - 3Q$, hitunglah penerimaan total maksimum. Gambarkanlah kurva AR, MR, dan TR dalam satu diagram!
 - a. Carilah fungsi penerimaan total (TR)
 - b. Cari Q pd saat TR maks
 - c. Cari TR maks
 - d. Gambar kurva TR
 - e. Gambar kurva AR
 - f. Gambar kurva MR

Latihan

- Fungsi permintaan suatu produk adalah $P = 36 - 3Q$, carilah penerimaan total maksimum? Gambarkanlah kurva permintaan, penerimaan marjinal, dan penerimaan total dalam satu diagram!

Laba Maksimum

- Jika diketahui fungsi permintaan dari suatu perusahaan $P = 557 - 0,2Q$ dan fungsi biaya total adalah $TC = 0,05Q^3 - 0,2Q^2 + 17Q + 7000$, maka
 - a. Tentukan persamaan laba!
 - b. Berapakah jumlah output yang harus dijual supaya produsen memperoleh laba yang maksimum?
 - c. Berapakah laba maksimum tersebut?
 - d. Berapakah harga jual per unit produk ketika laba maks?
 - e. Berapakah biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan ketika laba maks?
 - f. Berapakah penerimaan total yang diperoleh perusahaan ketika laba maks?

Latihan

- Jika penerimaan total dari produsen ditunjukkan oleh fungsi $TR = 1000Q - 2Q^2$ dan biaya totalnya ditunjukkan oleh fungsi $TC = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$, maka:
 - a. Berapakah jumlah output yang harus dijual supaya produsen memperoleh laba yang maksimum?
 - b. Berapakah laba maksimum tersebut?
 - c. Berapakah harga jual per unit produk ketika laba maks?
 - d. Berapakah biaya total yang dikeluarkan oleh produsen ketika laba maks?
 - e. Berapakah penerimaan total yang diperoleh dari produsen ketika laba maks?

LATIHAN

- Seorang pembuat kue basah yang biasa berjualan di pasar harus mengeluarkan biaya sebesar Rp 100.000,- walaupun ia sedang tidak memproduksi. Sedangkan biaya variabel yang harus dikeluarkan ditunjukkan oleh persamaan $VC = \frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 50Q$. tentukan:
 - a. Fungsi biaya total, biaya marginal, biaya tetap rata – rata, biaya variabel rata –rata dan biaya rata – ratanya.
 - b. Berapa biaya marginal minimum, dan berapa potong kue yang harus diproduksi pada saat tersebut.
 - c. Berapa potong kue yg harus diproduksi supaya biaya variabel rata-rata minimum dan berapa AVC min?

Diferensial Parsial

Diferensial parsial

Nilai ekstrim: maksimum dan minimum

Diferensial Parsial

$$y = f(x,z) = x^3 + 5z^2 - 4x^2z - 6xz^2 + 8z - 7$$

$$f_x(x,z) = 3x^2 - 8xz - 6z^2$$

$$f_z(x,z) = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$$

$$\begin{aligned} dy &= f_x(x,z) dx + f_z(x,z) dz \\ &= (3x^2 - 8xz - 6z^2) dx + (10z - 4x^2 - 12xz + 8) dz \end{aligned}$$

Keterangan:

- a. Derivatif parsial: $f_x(x,z)$ dan $f_z(x,z)$
- b. Diferensial parsial: $f_x(x,z) dx$ dan $f_z(x,z) dz$
- c. Diferensial total: $dy = f_x(x,z) dx + f_z(x,z) dz$

Nilai Ekstrim: Maksimum dan Minimum

- Fungsi $y = f(x, z)$ akan mencapai titik ekstrim jika
$$f_x(x, z) = 0 \text{ dan } f_z(x, z) = 0$$
- Maksimum bila $f_{xx}(x, z) < 0$ dan $f_{zz}(x, z) < 0$
- Minimum bila $f_{xx}(x, z) > 0$ dan $f_{zz}(x, z) > 0$

Penerapan Ekonomi

Permintaan marginal dan elastisitas permintaan parsial
Perusahaan dg 2 produk dan biaya produksi gabungan

Permintaan Marjinal

- Jika barang A dan barang B mempunyai hubungan penggunaan, dengan fungsi permintaan

$$Q_{da}=f(P_a, P_b) \text{ dan } Q_{db}=f(P_a, P_b)$$

- Permintaan marjinal

- a. $(\partial Q_{da}/\partial P_a)$ Perm. marj. A berkenaan dg P_a
- b. $(\partial Q_{db}/\partial P_a)$ Perm. marj. B berkenaan dg P_a
- c. $(\partial Q_{da}/\partial P_b)$ Perm. marj. A berkenaan dg P_b
- d. $(\partial Q_{db}/\partial P_b)$ Perm. marj. B berkenaan dg P_b

Elastisitas Permintaan Parsial

Elastisitas harga permintaan

1. $E_{da} = (\partial Q_{da} / \partial P_a)(P_a / Q_{da})$
2. $E_{db} = (\partial Q_{db} / \partial P_b)(P_b / Q_{db})$

Elastisitas silang permintaan

1. $E_{ab} = (\partial Q_{da} / \partial P_b)(P_b / Q_{da})$
2. $E_{ba} = (\partial Q_{db} / \partial P_a)(P_a / Q_{db})$

Elastisitas Permintaan Parsial

Keterangan:

- a. Jk $E_{ab}, E_{ba} < 0$ untuk P_a dan P_b tertentu, mk brg A & B saling melengkapi

Penurunan harga salah satu brg akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas keduanya

- b. Jk $E_{ab}, E_{ba} > 0$ untuk P_a dan P_b tertentu, mk brg A & B saling menggantikan

Penurunan harga salah satu brg akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas brg tsb & penurunan permintaan atas brg lainnya

Contoh Soal

Fungsi permintaan akan brg A dan B masing-masing ditunjukkan oleh

$$Q_{da}(P_a)^2(P_b)^3 - 1 = 0 \text{ dan } Q_{db}(P_a)^3P_b - 1 = 0$$

Berapakah elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

Jawab

$$Q_{da}(P_a)^2(P_b)^3 - 1 = 0$$

$$Q_{da}(P_a)^2(P_b)^3 = 1$$

$$Q_{da} = 1 / ((P_a)^2(P_b)^3)$$
$$= (P_a)^{-2}(P_b)^{-3}$$

$$Q_{db}(P_a)^3P_b - 1 = 0$$

$$Q_{db}(P_a)^3P_b = 1$$

$$Q_{db} = 1 / ((P_a)^3P_b)$$
$$= (P_a)^{-3}(P_b)^{-1}$$

Jawab

$$\begin{aligned}E_{da} &= (\partial Q_{da} / \partial P_a)(P_a / Q_{da}) \\&= (-2(P_a)^{-3}(P_b))P_a / ((P_a)^{-2}(P_b)^{-3}) \\&= -2\end{aligned}$$

Barang A elastis krn $|E_{da}| > 1$

$$\begin{aligned}E_{db} &= (\partial Q_{db} / \partial P_b)(P_b / Q_{db}) \\&= (-(P_a)^{-3}(P_b)^{-2})P_b / ((P_a)^{-3}(P_b)^{-1}) \\&= -1\end{aligned}$$

Barang B uniter krn $|E_{da}| = 1$

$$\begin{aligned}E_{ab} &= (\partial Q_{da} / \partial P_b)(P_b / Q_{da}) \\&= (-3(P_a)^{-2}(P_b)^{-4})P_b / ((P_a)^{-2}(P_b)^{-3}) \\&= -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_{ba} &= (\partial Q_{db} / \partial P_a)(P_a / Q_{db}) \\&= (-3(P_a)^{-4}(P_b)^{-1})P_a / ((P_a)^{-3}(P_b)^{-1}) \\&= -3\end{aligned}$$

Karena $E_{ab}, E_{ba} < 0$, mk brg A & B saling melengkapi

Latihan

- Jika diketahui pasangan fungsi permintaan untuk produk X dan Y berikut ini:

$$Q_x = P_x^{-1.5}P_y^{-0.4} \text{ dan } Q_y = P_x^{-0.5}P_y^{-0.4}$$

- Tentukan hubungan produk X dan Y!

Perusahaan dg 2 Produk dan Biaya Produksi Gabungan

- Perusahaan menghasilkan dua macam produk
- Biaya keduanya merupakan biaya produksi gabungan
- Keuntungan maksimum dihitung menggunakan pendekatan diferensial

Perusahaan dg 2 Produk dan Biaya Produksi Gabungan

- Penerimaan dr memproduksi A: $R_a = Q_a P_a = f(Q_a)$
- Penerimaan dr memproduksi B: $R_b = Q_b P_b = f(Q_b)$
- Penerimaan total : $TR = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$
- Biaya total : $TC = f(Q_a, Q_b)$
- Fungsi keuntungan : $\pi = TR - TC$
- π maksimum bila $\pi' = 0$, yaitu
$$\partial \pi / \partial Q_a = 0 \text{ dan } \partial \pi / \partial Q_b = 0 \dots\dots\dots (i)$$

Dari (i), Q_a dan Q_b dapat diperoleh. Selanjutnya nilai π maksimum dapat dihitung.

Contoh Soal

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yg memproduksi dua macam barang ditunjukkan

$$TC=(Q_a)^2+3(Q_b)^2+Q_aQ_b$$

Hasil jual masing-masing barang per unit adalah $P_a=7$ sedangkan $P_b=20$.

- a. Hitunglah berapa unit masing-masing yg hrs diproduksi agar keuntungannya maksimum!
- b. Hitunglah besar keuntungan maksimum tsb?

Jawab

a. Q maksimum

$$R_a = Q_a P_a = 7Q_a \quad \text{dan} \quad R_b = Q_b P_b = 20Q_b$$

$$TR = R_a + R_b = 7Q_a + 20Q_b$$

$$\pi = TR - TC$$

$$= (7Q_a + 20Q_b) - ((Q_a)^2 + 3(Q_b)^2 + Q_a Q_b)$$

$$= 7Q_a + 20Q_b - (Q_a)^2 - 3(Q_b)^2 - Q_a Q_b$$

Jawab

Agar π maksimum, $\pi'=0$

i. $\partial \pi / \partial Q_a = 0$ mk $7 - 2Q_a - Q_b = 0$

ii. $\partial \pi / \partial Q_b = 0$ mk $20 - 6Q_b - Q_a = 0$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

b. π maksimum

$$\begin{aligned}\pi &= 7Q_a + 20Q_b - (Q_a)^2 - 3(Q_b)^2 - Q_aQ_b \\ &= 7.2 + 20.3 - 2^2 - 3.3^2 - 2.3 \\ &= 37\end{aligned}$$

LATIHAN

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yg memproduksi dua macam barang ditunjukkan

$$TC=2(Q_a)^2+2(Q_b)^2+Q_aQ_b$$

Hasil jual masing-masing barang per unit adalah $P_a=10$ sedangkan $P_b=15$.

- a. Hitunglah berapa unit masing-masing yg hrs diproduksi agar keuntungannya maksimum!
- b. Hitunglah besar keuntungan maksimum tsb?

Optimisasi Bersyarat

Metode Lagrange

Metode Kuhn Tucker

Metode Lagrange

- Penghitungan nilai ekstrim sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain.
- Membentuk sebuah fungsi baru, yaitu fungsi Lagrange.

Fungsi Lagrange

- Misalkan hendak dioptimumkan:

$$z=f(x,y)$$

- Dengan syarat harus terpenuhi:

$$u=g(x,y)$$

- Maka fungsi Lagrangnya:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+ \lambda g(x,y)$$

Optimisasi Fungsi Lagrange

- Nilai ekstrim dapat dicari dengan memformulasikan derivatif-parsial pertamanya sama dengan 0:

$$F_x(x,y,\lambda)=f_x+\lambda g_x=0$$

$$F_y(x,y,\lambda)=f_y+\lambda g_y=0$$

- Nilai ekstrim tersebut:
 - Maksimum bila $F_{xx}<0$ dan $F_{yy}<0$.
 - Minimum bila $F_{xx}>0$ dan $F_{yy}>0$.

Contoh Soal

Tentukan nilai ekstrim $z=xy$ dengan syarat $x+2y=10$!

Jawab

- Fungsi Lagrange

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= xy + \lambda(x+2y-10) \\ &= xy + \lambda x + \lambda 2y - \lambda 10 \end{aligned}$$

- Syarat agar $F(x,y,\lambda)$ optimum, $F'(x,y,\lambda)=0$

$$F_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0 \quad \text{diperoleh} \quad \lambda=-y$$

$$F_y(x,y,\lambda)=x+2\lambda=0 \quad \text{diperoleh} \quad \lambda=-x/2$$

Sehingga diperoleh $2y=x$

- Substitusi $2y=x$ terhadap fungsi kendala $x+2y=10$, diperoleh $y=2,5$ dan $x=5$.
- Karena $F_{xx}=0$ dan $F_{yy}=0$ maka $f(5;2,5)=12,5$

LATIHAN

- Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$. Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.

Penerapan Ekonomi

Produk marginal parsial dan keseimbangan produksi

Utilitas marginal parsial dan keseimbangan konsumsi

Keseimbangan Produksi

- Definisi: suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi scr optimum.
- Tingkat kombinasi penggunaan masukan yg optimum dpt dicari dg Metode Lagrange
- Fungsi produksi $P=f(k,l)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M=kP_k+lP_l$ dengan M adalah total anggaran untuk membeli masukan K dan L

Keseimbangan Produksi

- Fungsi tujuan yg hendak dioptimumkan: $P=f(k,l)$
- Fungsi kendala yg dihadapi: $M=kP_k+IP_l$

- Fungsi baru Lagrange:

$$F(k,l)=f(k,l)+\lambda(kP_k+IP_l-M)$$

- Syarat yg diperlukan agar $F(k,l)$ maksimum:

$$F_k(k,l)=0 \text{ yaitu } f_k(k,l)+\lambda P_k=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$F_l(k,l)=0 \text{ yaitu } f_l(k,l)+\lambda P_l=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) nilai k dan l bisa didapat. Selanjutnya P maksimum bisa diperoleh.

Contoh Soal

Seorang produsen mencadangkan Rp.96,00 untuk membeli masukan K dan masukan L. harga per unit masukan K adalah Rp.4,00 dan masukan L adalah Rp.3,00. Fungsi produksinya $P=12kl$.

- a. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum?
- b. Berapa unit keluaran yg dihasilkan dengan kombinasi tsb?

Jawab

- Fungsi tujuan yg hendak dioptimumkan: $P=12kl$
- Fungsi kendala yg dihadapi: $96=4k+3l$

- Fungsi baru Lagrange:

$$F(k,l)=12kl+\lambda(4k+3l-96)$$

- Agar $F(k,l)$ maksimum:

$$F_x(k,l)=0 \text{ yaitu } 12l-4\lambda=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$F_y(k,l)=0 \text{ yaitu } 12k-3\lambda=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Jawab

- Dari (1) dan (2), diperoleh $3l=4k$
- Substitusi pers tsb ke fungsi kendala:

$$96 = 4k + 3l$$

$$= 4k + 4k$$

$$= 8k$$

Diperoleh $k=12$ dan $l=16$

- Sehingga $P=12kl=12.12.16=2304$

LATIHAN

- Qintara akan membuat 2 (dua) jenis souvenir dengan anggaran biaya Rp 2.500.000,- Biaya bahan baku souvenir A Rp 3.500,- per unit dan souvenir B Rp 50.000,- per unit. Misalkan fungsi produksi $P=500AB$, tentukan:
 - a. Jumlah kedua souvenir supaya produksi optimum?
 - b. Hasil produksinya!

Keseimbangan Konsumsi

- Definisi: suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi bbrp mcm brg yg memberikan kepuasan optimum
- Tingkat kombinasi konsumsi yg memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dpt dicari dg Metode Lagrange atau Kuhn-Tucker
- Fungsi utilitas $U=f(x,y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M=xP_x+yP_y$ dengan M adalah pendapatan konsumen

Keseimbangan Konsumsi

- Fungsi Lagrange:

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda(xP_x+yP_y-M)$$

- Agar F maksimum

$$F_x(x,y)=0 \quad \text{yaitu} \quad f_x(x,y)+\lambda P_x=0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$F_y(x,y)=0 \quad \text{yaitu} \quad f_y(x,y)+\lambda P_y=0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Contoh Soal

- Jika diketahui fungsi utilitas $U = 4xy - x^2 - 3y^2$ dan harga barang $x = 2$, harga barang $y = 3$ serta pendapatan konsumen adalah 45. Tentukan nilai x dan y yang dapat memaksimumkan utilitas? Berapa besar utilitas maksimum tersebut?

- Kepuasan seorang konsumen dari mengonsumsi brg X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U=x^2y^3$. jumlah pendapatan konsumen Rp.1.000,00, harga X dan Y per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.
 - a. Tentukan nilai x dan y yang dapat memaksimumkan utilitas?
 - b. Berapa besar utilitas maksimum tersebut?

Utilitas Marginal Parsial

- Misalkan konsumen hanya mengkonsumsi brg X dan Y, maka fungsi kepuasan konsumen (utilitas) adalah:

$$U=f(x,y)$$

- Utilitas marginal parsial
 1. $\partial U/\partial x=0$ utilitas marginal berkenaan dg brg X
 2. $\partial U/\partial y=0$ utilitas marginal berkenaan dg brg Y

Utilitas Marginal Parsial

- Selanjutnya perhatikan:

Utilitas total: $U=f(x,y)$

Utilitas marginal: $MU=U'=f'(x,y)$

- i. Utilitas marginal barang X: $MU_x=f_x(x,y)$
- ii. Utilitas marginal barang Y: $MU_y=f_y(x,y)$

- Menurut (1) dan (2), keseimbangan konsumsi tercapai apabila:

$$(f_x(x,y))/P_x = (f_y(x,y))/P_y$$

$$MU_x/P_x = MU_y/P_y$$

Contoh Soal

Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi brg X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U=x^2y^3$. jumlah pendapatan konsumen Rp.1.000,00, harga X dan Y per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah.

- a. Bentuklah fungsi utilitas marginal untuk masing-masing barang!
- b. Berapa utilitas marginal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit X dan dan 13 unit Y?
- c. Jelaskan apakah dg mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unti Y kepuasan konsumen optimum atau tidak?

Jawab

a. $U = x^2y^3$

$$MU_x = 2xy^3$$

$$MU_y = 2x^2y^2$$

b. Jika $x=14$ dan $y=13$

$$\begin{aligned} MU_x &= 2(14)(13)^3 \\ &= 61.516 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MU_y &= 3(14)^2(13)^2 \\ &= 99.372 \end{aligned}$$

c. Kepuasan konsumen

$$\begin{aligned} MU_x/P_x &= 61.516/25 \\ &= 2.460,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MU_y/P_y &= 99.372/50 \\ &= 1.987,44 \end{aligned}$$

Karena $MU_x/P_x \neq MU_y/P_y$
maka tidak terjadi
keseimbangan konsumsi.

Latihan

- Hana akan membeli kasur dan lemari untuk perlengkapan asrama mahasiswa dengan harga Rp 1.5jt per kasur dan Rp 500rb per lemari. Misalkan fungsi utilitas $U = 2k^3l^3$ (k kasur dan l lemari), tentukan:
 - a. Fungsi utilitas marginal untuk kedua barang!
 - b. Utilitas marginal untuk pembelian 10 kasur dan 5 lemari!
 - c. Apakah kepuasan konsumen optimum dengan pembelian pada poin (b)?

Pengenalan Matriks

Definisi

Ukuran matriks

Anggota matriks

Tipe matriks

Pengenalan Matriks (1)

- Definisi

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut.

- Ukuran Matriks

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya.

Pengenalan Matriks (2)

- Anggota Matriks

Anggota pada baris i dan kolom j dari sebuah matriks A dinyatakan sebagai $(A)_{ij}$ atau a_{ij} .

- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Beberapa Tipe Matriks (1)

- Matriks kolom (vektor kolom)

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Matriks baris (vektor baris)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriks bujur sangkar

- Orde n
- Diagonal utama

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 8 & 34 & 3 \\ 5 & 23 & 32 \end{pmatrix}$$

Beberapa Tipe Matriks (2)

- Matriks Nol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriks Identitas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriks Segitiga (atas dan bawah)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matriks Simetris

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks

Jumlah

Selisih

Hasil kali

Transpose

Operasi Matriks (1)

- Dua matriks dinyatakan **sama** jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan anggota-anggota yang berpadanan sama.
- Jika $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ maka $A=B$ jika dan hanya jika $a_{ij}=b_{ij}$ untuk semua i dan j .

Operasi Matriks (2)

- Jika A dan B berukuran sama, maka
 - **Jumlah** $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang berpadanan.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+4 \\ 9+2 & 6+5 \\ 7+3 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 11 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 5-4 \\ 9-2 & 6-5 \\ 7-3 & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks (3)

- Jika A adalah sebarang matriks dan c sebarang skalar, maka **hasil kali** cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan c .

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 4 & 3 \times 6 \\ 3 \times 4 & 3 \times 3 & 3 \times 7 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 18 \\ 12 & 9 & 21 \\ 18 & 21 & 12 \end{pmatrix}$$

Operasi Matriks (4)

- Jika matriks A berukuran $m \times r$ dan B berukuran $r \times n$, maka **hasil kali** AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya didefinisikan sbb:

Anggota baris i dan kolom j dari AB , pilih baris i matriks A dan kolom j matriks B . Kalikan anggota-anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + (5 \times 6) & (3 \times 4) + (5 \times 3) \\ (9 \times 1) + (6 \times 6) & (9 \times 4) + (6 \times 3) \\ (7 \times 1) + (5 \times 6) & (7 \times 4) + (5 \times 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 27 \\ 45 & 54 \\ 37 & 43 \end{pmatrix}$$

Transpose Matriks

- Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Maka transpose matriks A adalah

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinan Matriks

Definisi

Minor dan kofaktor

Determinan Matriks (1)

- Definisi

Anggap A suatu matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinyatakan dengan $\det$, dan kita mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali dasar bertanda dari A . Angka $\det(A)$ disebut *determinan* A .

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = (1 \times 3) - (4 \times 6) = 3 - 24 = -21$$

Determinan Matriks (2)

- Minor dan Kofaktor

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka **minor anggota a_{ij}** dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A .

Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut **kofaktor anggota a_{ij}** .

Determinan Matriks (3)

- Misalkan mencari minor dan kofaktor dr baris 2 klm 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Maka

$$M_{21} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = -4$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} \\ &= (-1)(-4) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Tugas 1

- Hitung semua kofaktor dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinan Matriks (4)

- Determinan suatu matriks A $n \times n$ bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil yang didapatkan; yaitu untuk setiap $1 < i < n$ dan $1 < j < n$,
 - $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$
 - $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}$

Contoh 1

- Hitung determinan dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Adjoin Matriks

Adjoin Matriks

- Adjoin dari suatu matriks adalah transpose dari matriks kofaktor-kofaktornya.
- Misalkan C_{ij} adalah kofaktor dari matriks (A_{ij}) maka $\text{adj}(A) = (C_{ij})^t$ untuk $i = \{1, \dots, m\}$ dan $j = \{1, \dots, n\}$.

Tugas 2

- Tentukan adjoin dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriks Invers

Matriks Invers

- Definisi

Jika A sebuah matriks bujur sangkar, dan jika B yang berukuran sama didapatkan sedemikian sehingga $AB=BA=I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A .

Contoh 2

- Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Maka invers dari matriks A

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \\ &= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6/4 & 1/2 \\ 5/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tugas 3

- Tentukan invers dari matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Tentukan balikan (invers) dari matriks berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$



Sampai Jumpa Minggu Depan